Semantica
4.2 – Semantica della logica proposizionale

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Interpretazioni

Sia L un insieme di lettere proposizionali.

Definizione

Un'**interpretazione** è una funzione $i \colon L \longrightarrow \{0, 1\}$.

L'idea è che un'interpretazione i assegna valori di verità (0 per falso, 1 per vero) alle lettere proposizionali scelte.

Esempio

Sia $L = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. Allora l'interpretazione $i \colon L \to \{0, 1\}$ definita da

$$i(\mathrm{A}) = 0$$
$$i(\mathrm{B}) = 1$$

"descrive" la situazione in cui A è falsa e B è vera.

L'interpretazione $i(\mathrm{A}) = i(\mathrm{B}) = 1$ "descrive" invece la situazione in cui sia A che B sono vere.

Valutazioni

Definizione

Una **valutazione** è una funzione $v\colon \mathrm{Prop}(L) \to \{0,1\}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$
\begin{aligned}
v((\neg \mathrm{P})) &= 1 - v(\mathrm{P}) \\
v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) &= \min\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\
v((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})) &= \max\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\
v((\mathrm{P} \to \mathrm{Q})) &= \max\{1 - v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\
v((\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})) &= 1 - |v(\mathrm{P}) - v(\mathrm{Q})|.
\end{aligned}
$$

Dunque una valutazione assegna valori di verità a *tutte* le (infinite!) proposizioni che si possono scrivere a partire da L. Le condizioni nella definizione di valutazione sono essenzialmente espressioni analitiche (in termini di funzioni) delle tavole di verità dei connettivi.

Esempio

La condizione

$$v((\neg P)) = 1 - v(P)$$

fa sì che

- se $v(P) = 0$ (ovvero "P è falsa"), allora $v((\neg P)) = 1 - 0 = 1$ (ovvero "$(\neg P)$ è vera");
- se $v(P) = 1$ (ovvero "P è vera"), allora $v((\neg P)) = 1 - 1 = 0$ (ovvero "$(\neg P)$ è falsa").

Questo descrive esattamente la tavola di verità della negazione:

P	¬P
F	**V**
V	**F**

ovvero

P	¬P
0	1
1	0

Esempio ($v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) = \min\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\}$)

- Se $v(\mathrm{P}) = v(\mathrm{Q}) = 0$ ("P e Q sono false"), allora $v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) = \min\{0, 0\} = 0$ ("$(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ è falsa").
- Se $v(\mathrm{P}) = 1$ e $v(\mathrm{Q}) = 0$ ("P è vera e Q è falsa"), allora $v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) = \min\{1, 0\} = 0$ ("$(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ è falsa").
- Se $v(\mathrm{P}) = 0$ e $v(\mathrm{Q}) = 1$ ("P è falsa e Q è vera"), allora $v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) = \min\{0, 1\} = 0$ ("$(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ è falsa").
- Se $v(\mathrm{P}) = v(\mathrm{Q}) = 1$ ("P e Q sono vere"), allora $v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) = \min\{1, 1\} = 1$ ("$(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$ è vera").

Questo descrive esattamente la tavola di verità della congiunzione:

P	Q	P ∧ Q
F	**F**	**F**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
V	**V**	**V**

ovvero

P	Q	P ∧ Q
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Esercizio

Verificare che le rimanenti condizioni nella definizione di valutazione descrivono le tavole di verità dei rispettivi connettivi.

Ogni valutazione $v\colon \mathrm{Prop}(L) \to \{0,1\}$ fornisce, in particolare, una corrispondente interpretazione $i\colon L \to \{0,1\}$ che si ottiene stabilendo che per ogni $\mathrm{A} \in L$

$$i(\mathrm{A}) \stackrel{\text{def}}{=} v((\mathrm{A})).$$

In altre parole, i è la "restrizione" di v ad L una volta che si identifichi ciascuna lettera proposizionale A con la corrispondente formula atomica (A): per questa ragione la denoteremo con $v \restriction L$.

Vediamo ora che, viceversa, da un'interpretazione i si può ottenere in maniera canonica una valutazione, che denoteremo con i^*.

Ogni interpretazione i si estende a una valutazione i^* ponendo $i^*((\mathrm{A})) = i(\mathrm{A})$ per ogni $\mathrm{A} \in L$, e definendo $i^*(P)$ per le proposizioni P non atomiche così:

$$\begin{aligned} i^*((\neg \mathrm{P})) &= 1 - i^*(\mathrm{P}) \\ i^*((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) &= \min\{i^*(\mathrm{P}), i^*(\mathrm{Q})\} \\ i^*((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})) &= \max\{i^*(\mathrm{P}), i^*(\mathrm{Q})\} \\ i^*((\mathrm{P} \to \mathrm{Q})) &= \max\{1 - i^*(\mathrm{P}), i^*(\mathrm{Q})\} \\ i^*((\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})) &= 1 - |i^*(\mathrm{P}) - i^*(\mathrm{Q})|. \end{aligned}$$

Le condizioni sono le stesse della definizione di valutazione, ovvero "descrivono" la tavola di verità dei connettivi corrispondenti!

Osservazione

L'interpretazione $v \restriction L$ indotta da una valutazione v è tale che $(v \restriction L)^* = v$. Viceversa, per ogni interpretazione i si ha che $i^* \restriction L = i$.

Come si calcola i^*?

Data un'interpretazione i ed una proposizione non atomica $\mathrm{P} \in \mathrm{Prop}(L)$, per calcolare $i^*(\mathrm{P})$ bisognerà prima di tutto aver calcolato il valore di i^* sulle sottoproposizioni principali di P. Ripetendo questo ragionamento anche per le sottoproposizioni (principali) di P, si vede che per calcolare $i^*(\mathrm{P})$ bisognerà prima calcolare i^* su tutte le sue sottoproposizioni, partendo da quelle atomiche e seguendo poi la struttura dell'albero sintattico.

Osservazione

Il valore di $i^*(\mathrm{P})$ dipende *solo dal valore assunto da i sulle lettere proposizionali che occorrono in* P.

Esempio. Sia $L = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$ e $\mathrm{P} \in \mathrm{Prop}(L)$ la proposizione $(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \to \neg\mathrm{D}$. Un'interpretazione $i \colon L \to \{0, 1\}$ si ottiene assegnando un valore di verità a *tutte* le lettere proposizionali di L. Tuttavia, solo i valori $i(\mathrm{A})$, $i(\mathrm{B})$ e $i(\mathrm{D})$ sono rilevanti per il calcolo di $i^*(\mathrm{P})$, mentre il valore $i(\mathrm{C})$ è del tutto irrilevante per questo scopo.

Un esempio

Sia $i(\mathrm{A}) = 1$ e $i(\mathrm{B}) = 0$. Calcoliamo $i^*(\mathrm{P})$ dove P è $(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \vee \neg \mathrm{A}$. L'albero sintattico di P è

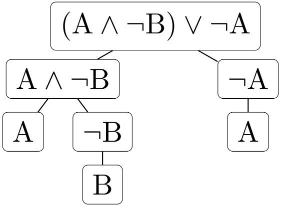

Figura: Alberto sintattico di $\mathrm{P} = (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \vee \neg \mathrm{A}$

Poiché P è della forma $\mathrm{R} \vee \mathrm{S}$, dovremo innanzitutto calcolare $i^*(\mathrm{R})$ e $i^*(\mathrm{S})$ per poter poi calcolare $i^*(\mathrm{P}) = \max\{i^*(\mathrm{R}), i^*(\mathrm{S})\}$.

A sua volta, poichè R è della forma $\mathrm{W} \wedge \mathrm{T}$, dovremo prima calcolare $i^*(\mathrm{W})$ e $i^*(\mathrm{T})$ per poter poi calcolare $i^*(\mathrm{R}) = \min\{i^*(\mathrm{W}), i^*(\mathrm{T})\}$. E così via fino alle foglie, in cui il valore di i^* è dato esplicitamente da i.

Un esempio (continua)

Dunque per calcolare $i^*((\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \vee \neg \mathrm{A})$ a partire da $i(\mathrm{A}) = 1$ e $i(\mathrm{B}) = 0$ procederemo come segue

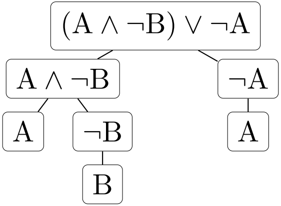

Figura: Alberto sintattico di $(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \vee \neg \mathrm{A}$

Si ricordi che per definizione $i^*(\mathrm{A}) = i(\mathrm{A}) = 1$ e $i^*(\mathrm{B}) = i(\mathrm{B}) = 0$.

$$
\begin{aligned}
i^*(\neg \mathrm{B}) &= 1 - i^*(\mathrm{B}) = 1 - 0 = 1 \\
i^*(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) &= \min\{i^*(\mathrm{A}), i^*(\neg \mathrm{B})\} = \min\{1, 1\} = 1 \\
i^*(\neg \mathrm{A}) &= 1 - i^*(\mathrm{A}) = 1 - 1 = 0 \\
i^*((\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \vee \neg \mathrm{A}) &= \max\{i^*(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}), i^*(\neg \mathrm{A})\} = \max\{1, 0\} = 1
\end{aligned}
$$

Un esempio (continua)

Dunque per determinare $i^*((\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{A})$ a partire da $i(\mathrm{A}) = 1$ e $i(\mathrm{B}) = 0$ abbiamo calcolato in successione i valori seguenti:

$$\begin{aligned}
i^*(\neg\mathrm{B}) &= 1 - i^*(\mathrm{B}) = 1 - 0 = 1 \\
i^*(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) &= \min\{i^*(\mathrm{A}), i^*(\neg\mathrm{B})\} = \min\{1, 1\} = 1 \\
i^*(\neg\mathrm{A}) &= 1 - i^*(\mathrm{A}) = 1 - 1 = 0 \\
i^*((\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{A}) &= \max\{i^*(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}), i^*(\neg\mathrm{A})\} = \max\{1, 0\} = 1
\end{aligned}$$

Graficamente possiamo rappresentare questi conti ponendo i valori così ottenuti sotto la proposizione corrispondente:

A	B	$\neg\mathrm{B}$	$\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$	$\neg\mathrm{A}$	$(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{A}$
1	0	1	1	0	1

Dunque calcolare $i^*(\mathrm{P})$ corrisponde a calcolare una riga della tavola di verità di P — la riga determinata dall'interpretazione i.

Tavole di verità

Per calcolare una tavola di verità di una proposizione P bisogna quindi:

1. costruire l'albero sintattico di P, che ci permetterà di
   - verificare che P è una proposizione ben formata;
   - determinare le sottoproposizioni di P e l'ordine con cui andranno considerate;
   - individuare un linguaggio L "minimale" tale che $\mathrm{P} \in \mathrm{Prop}(L)$: infatti L è costituito da tutte le (lettere proposizionali che formano le) sottoproposizioni atomiche di P, che a loro volta corrispondono alle foglie dell'albero;
2. considerare tutte le possibili interpretazioni $i \colon L \to \{0, 1\}$, ovvero tutte le possibili combinazioni di assegnazioni di valori di verità alle lettere proposizionali in L (ciascuna interpretazione i sarà una diversa riga nella tavola di verità);
3. estendere ciascuna di tali interpretazioni i alla corrispondente valutazione i^* fino a calcolare $i^*(\mathrm{P})$.

Un esempio

Sia P la proposizione $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$.

> **Step 1.** Costruire l'albero sintattico di $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$, che ci permetterà di determinare le sue sottoproposizioni e l'ordine con cui andranno considerate, ed un opportuno linguaggio L.

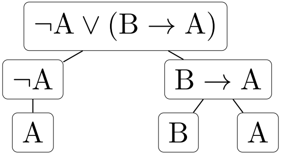

Figura: Albero sintattico di $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$

A	B	$\neg \mathrm{A}$	$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$	$\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$

Un esempio

Sia P la proposizione $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$.

Step 2. Considerare tutte le possibili interpretazioni $i\colon L \to \{0,1\}$.

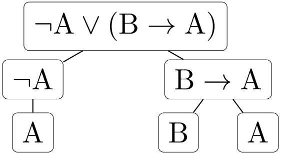

Figura: Albero sintattico di $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$

A	B	$\neg \mathrm{A}$	$\mathrm{B} \to \mathrm{A}$	$\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Un esempio

Sia P la proposizione $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$.

Step 3. Estendere ciascuna di tali interpretazioni i alla corrispondente valutazione i^* fino a calcolare $i^*(\mathrm{P})$.

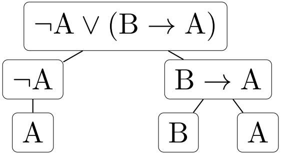

Figura: Albero sintattico di $\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$

A	B	$\neg \mathrm{A}$	$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$	$\neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A})$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Alcune nozioni logiche

- Se $i^*(\mathrm{P}) = 1$, si dice che P è **vera** nell'interpretazione i, o che i *soddisfa* P, o che i è un **modello** di P, e si scrive anche
$$i \models \mathrm{P}.$$
- Se esiste almeno un'interpretazione i tale che $i \models \mathrm{P}$, si dice che P è **soddisfacibile**, o **coerente**.
- Se non esiste alcun modello di P, si dice che P è **insoddisfacibile**, o **incoerente**, o **contraddittoria**, o una **contraddizione**.
- Se per ogni interpretazione i si ha $i \models \mathrm{P}$, si dice che P è **(logicamente) valida**, o **logicamente vera**, o una **tautologia**, e si scrive
$$\models \mathrm{P}.$$

Le nozioni appena viste si possono anche estendere ad insiemi di proposizioni.

Sia $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}(L)$ un insieme (finito o infinito) di proposizioni costruite a partire dallo stesso insieme di lettere proposizionali L.

- Un'interpretazione $i \colon L \to \{0,1\}$ è un **modello** di Γ, in simboli
$$i \models \Gamma,$$
se $i \models \mathrm{P}$ per ogni $\mathrm{P} \in \Gamma$. In questo caso diciamo anche che Γ è **soddisfatto** da i, o che i **soddisfa** Γ.
- Γ si dice **soddisfacibile** (o **coerente**) se *esiste* un'interpretazione i tale che $i \models \Gamma$; in caso contrario, ovvero se $i \not\models \Gamma$ per ogni interpretazione i, si dice che Γ è **insoddisfacibile** (o **incoerente**).
- L'insieme di proposizioni Γ è **valido** se $i \models \Gamma$ *per ogni* interpretazione i. In questo caso scriviamo $\models \Gamma$.

Osservazioni

Sia $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}(L)$.

- Γ è valido se e solo se ogni $\mathrm{P} \in \Gamma$ è una tautologia.
- È invece possibile che tutte le proposizioni $\mathrm{P} \in \Gamma$ siano soddisfacibili, ma che Γ non sia soddisfacibile come insieme di proposizioni (si consideri ad esempio $\Gamma = \{\mathrm{A}, \neg\mathrm{A}\}$).
- Se $\Gamma = \{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ è un insieme finito, allora per ogni interpretazione i

$$i \models \Gamma \qquad \text{se e solo se} \qquad i \models \mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n.$$

  Di conseguenza, Γ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valido se e solo se la proposizione $\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n$ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valida.